Sur l'infimum des parties réelles des zéros des sommes partielles de la fonction zêta de Riemann

Michel Balazard, Oswaldo Velásquez Castañón

Sur l'infimum des parties réelles des zéros des sommes partielles de la fonction zêta de Riemann

Michel Balazard et Oswaldo Velásquez Castañón

5 février 2009

Let $\varphi_n = \inf\{\Re s \mid \sum_{m=1}^n m^{-s} = 0\}$. We show that $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n/n = -\log 2$.

1 Énoncé du théorème principal et principes de la démonstration

Soit

$$\zeta_n(s) = \sum_{m=1}^{n} m^{-s} \quad (s = \sigma + i\tau\,;\ \sigma,\tau \in \mathbb{R})$$

la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la série de Dirichlet de la fonction zêta de Riemann. Posons

$$\varphi_n = \inf\{\sigma \mid \zeta_n(s) = 0\} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Théorème *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi_n}{n} = -\log 2.$$

Pour $0 < k < n$, posons

$$\zeta_{n,k}(s) = n^{-s} - \sum_{n-k\leqslant j<n} j^{-s} + \sum_{1\leqslant j<n-k} j^{-s} \quad (s \in \mathbb{C}),$$

et

$$\rho_{n,k} = \inf\{\sigma \mid \zeta_{n,k}(\sigma) = 0\} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

(on ne considère ici que les zéros *réels*). Observons dès maintenant que $k \mapsto \rho_{n,k}$ est décroissante (car $k \mapsto \zeta_{n,k}(\sigma)$ est décroissante pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, et $\lim_{\sigma\to-\infty} \zeta_{n,k}(\sigma) = +\infty$).

Le théorème résulte de la proposition suivante.

Proposition 1 *(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_n \geqslant \rho_{n,n-1}$; (ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_1(k) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi_n \leqslant \rho_{n,k}$ pour tout $n \geqslant n_1(k)$; (iii) $\rho_{n,k}/n \to -\log 2 \quad (n > k \to \infty)$.*

Le point *(i)* est un exercice facile, signalé par exemple dans [2, Theorem 3.1]. Les auteurs de [2] démontrent en outre ([2, p. 25]) que

$$\frac{\rho_{n,n-1}}{n} \to -\log 2 \quad (n \to \infty).$$

Le point *(iii)* se démontre de la même façon, en observant que pour tout $c > 0$ fixé, on a

$$n^{-cn}\zeta_{n,k}(-cn) \to \frac{e^c - 2}{e^c - 1}, \quad (n > k \to \infty).$$

C'est donc le point *(ii)* qui va retenir notre attention. Dans [2], Borwein, Fee, Ferguson et van der Waall démontrent que $\varphi_p = \rho_{p,p-1}$ pour p premier (Theorem 4.10). Leur approche peut être étendue au cas de tous les entiers, en faisant appel au théorème d'équivalence de Bohr, que nous rappelons maintenant.

Deux séries de Dirichlet ordinaires

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s} \quad \text{et} \quad g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s}$$

sont dites équivalentes s'il existe une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ complètement multiplicative, telle que $b(m) = a(m)f(m)$ et $|f(m)| = 1$ pour tout $m \geqslant 1$ (cf. [1, Theorem 8.12], où la condition imposée à f, apparemment plus faible, est en fait équivalente à la nôtre). Le théorème d'équivalence de Bohr consiste alors en l'assertion suivante.

Soient $f(s)$ et $g(s)$ deux séries de Dirichlet équivalentes qui convergent absolument pour $\sigma > \sigma_0$. Alors, $f(s)$ et $g(s)$ prennent le même ensemble de valeurs dans toute bande ouverte incluse dans leur domaine de convergence absolue. Plus précisément, si $\sigma_0 \leqslant a < b$, alors

$$\big\{f(s),\, a < \sigma < b\big\} = \big\{g(s),\, a < \sigma < b\big\}.$$

Cet énoncé figure dans [1, Theorem 8.16], où seul le cas des demi-plans $\sigma > a$ est signalé. La démonstration pour une bande verticale est identique.

En particulier, $\zeta_n(s)$ prend dans tout demi-plan $\sigma < b$ exactement les mêmes valeurs que

$$\zeta_{n,\chi}(s) = \sum_{m=1}^{n} \chi(m) m^{-s},$$

où χ est une fonction complètement multiplicative à valeurs ± 1. Si

$$\chi(n) = \pm 1, \quad \chi(n-1) = \chi(n-2) = \cdots = \chi(n-k) = \mp 1, \tag{1}$$

on a

$$\pm\zeta_{n,\chi}(\sigma) \leqslant \zeta_{n,k}(\sigma), \quad (\sigma \in \mathbb{R}).$$

Par conséquent, $\zeta_{n,\chi}(\sigma)$ prend la valeur 0 dans la demi-droite $]-\infty, \rho_{n,k}]$, et donc $\zeta_n(s)$ possède un zéro dans le demi-plan $\sigma < b$ si $b > \rho_{n,k}$. Cela prouve *(ii)*, qui repose donc sur la proposition suivante, dont la démonstration est l'objet des paragraphes 2, 3 et 4.

Proposition 2 *Soit $k \geqslant 1$. Il existe $n_1(k)$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1(k)$, il existe une fonction $\chi : \mathbb{N}^* \to \{\pm 1\}$ complètement multiplicative vérifiant* (1).

Nous verrons que l'outil essentiel de la démonstration de la proposition 2 est le théorème de Siegel sur la finitude du nombre de points entiers d'une courbe elliptique définie sur les rationnels.

Terminons ce paragraphe en rappelant le résultat de Montgomery [3] :

$$\sup\big\{\sigma \mid \zeta_n(s) = 0\big\} = 1 + \Big(\frac{4}{\pi} - 1 + o(1)\Big)\frac{\log\log n}{\log n}, \quad n \to +\infty,$$

dont la démonstration utilise également le théorème d'équivalence de Bohr.

2 Système d'équations diophantiennes quadratiques

Nous utiliserons au §3 la propriété de finitude suivante.

Proposition 3 *Soit $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $u_3 > 0$, $k_3 > k_2 > k_1 \geqslant 0$ des nombres entiers. Le nombre de triplets (x, y, z) de nombres entiers tels que*

$$u_1 x^2 + k_1 = u_2 y^2 + k_2 = u_3 z^2 + k_3, \tag{2}$$

est fini.

Démonstration
Si (x, y, z) est une solution de (2), alors $(X, Y) = (u_2 u_3 u_1^2 x^2, u_1^2 u_2^2 u_3^2 xyz)$ est solution de

$$Y^2 = X(X - \alpha)(X - \beta), \tag{3}$$

avec $\alpha = u_1 u_2 u_3 (k_2 - k_1)$, $\beta = u_1 u_2 u_3 (k_3 - k_1)$. L'équation (3) est celle d'une courbe elliptique sous la forme de Weierstrass. Comme $0 < \alpha < \beta$, le théorème de Siegel [4, Chapter IX, Corollary 3.2.1] nous permet d'affirmer que (3) n'a qu'un nombre fini de solutions entières (X, Y). Par suite, (2) n'a qu'un nombre fini de solutions entières (x, y, z). □

3 Partie sans facteur carré d'entiers consécutifs

Pour $n \geqslant 1$, notons $\mathrm{r}(n)$ sa partie sans facteur carré : c'est l'unique entier $b \geqslant 1$ sans facteur carré tel que $n = a^2 b$, avec a entier. La proposition suivante rassemble les propriétés de la fonction $\mathrm{r}(n)$ utilisées au §4.

Proposition 4 *Pour $n > k \geqslant 1$, on considère les nombres*

$$\mathrm{r}(n), \mathrm{r}(n-1), \ldots, \mathrm{r}(n-k) \tag{4}$$

(i) Soit p un nombre premier, $p > k$. Alors p divise au plus un des nombres (4).
(ii) Si $n \geqslant k^2 + k$, les nombres (4) *sont deux à deux distincts.*
(iii) Il existe $n_0(k)$ tel que, pour $n \geqslant n_0(k)$, au plus deux d'entre les nombres (4) *ont tous leurs facteurs premiers $\leqslant k$.*

Démonstration
(i) Si $p | \mathrm{r}(n-i)$ et $p | \mathrm{r}(n-j)$ avec $0 \leqslant i < j \leqslant k$, alors $p | (j-i) \leqslant k$.
(ii) Si $n - i = ua^2$, $n - j = ua'^2$ avec $u, a, a' \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant i < j \leqslant k$, alors

$$k \geqslant j - i = u(a^2 - a'^2) = u(a + a')(a - a') > ua \geqslant (ua^2)^{1/2} \geqslant (n-k)^{1/2},$$

donc $n < k^2 + k$.
(iii) Soient $0 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 \leqslant k$ tels que les nombres $u_i = \mathrm{r}(n - k_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, possèdent tous leurs diviseurs premiers $\leqslant k$. Puisque u_i est sans facteur carré, $u_i \mid P$, où $P = \prod_{p \leqslant k} p$ est le produit des premiers $\leqslant k$. On écrit $n - k_i = u_i a_i^2$, où $a_i \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Pour chaque choix des u_i et des k_i, l'ensemble des entiers n correspondants est fini d'après la proposition 3. Puisque l'ensemble des sextuples $(u_1, u_2, u_3, k_1, k_2, k_3)$ est fini (avec moins de $P^3 k^3$ éléments), cela démontre le résultat. □

4 Fonctions complètement multiplicatives à valeurs ± 1 et entiers consécutifs

On démontre maintenant la proposition 2. On commence par remarquer que $\chi(m) = \chi\big(\mathrm{r}(m)\big)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ si χ est complètement multiplicative à valeurs ± 1.

Soit $n \geqslant n_1(k)$, où $n_1(k) = \max\big(k^2 + k, n_0(k)\big)$, et $n_0(k)$ vérifie le *(iii)* de la proposition 4.
Premier cas : on suppose qu'un nombre premier $p > k$ divise $\mathrm{r}(n)$. D'après la proposition 4, *(i)*, les diviseurs premiers des $\mathrm{r}(n-j)$, $0 < j \leqslant k$, sont tous distincts de p. On pose alors $\chi(p) = -1$, et $\chi(q) = 1$ pour $q \neq p$, pour obtenir (1) avec $\chi(n) = -1$.
Deuxième cas : on suppose que tous les diviseurs premiers de $\mathrm{r}(n)$ sont $\leqslant k$. D'après la proposition 4, *(iii)*, il existe j_0 tel que $0 < j_0 \leqslant k$ et tel que $\mathrm{r}(n-j)$ possède un facteur premier $p_j > k$ pour $0 < j \leqslant k$, $j \neq j_0$. D'après la proposition 4, *(i)*, chacun des p_j ne divise que $\mathrm{r}(n-j)$ parmi les nombres (4). De plus, d'après la proposition 4, *(ii)*, on a $\mathrm{r}(n) \neq \mathrm{r}(n-j_0)$. Il existe donc un nombre premier p qui ne divise qu'un seul de ces deux nombres. Premier sous-cas : $p \mid \mathrm{r}(n)$ et $p \nmid \mathrm{r}(n-j_0)$. On pose alors $\chi(p) = -1$, $\chi(p_j) = (-1)^{[p|\mathrm{r}(n-j)]}$ pour $0 < j \leqslant k$, $j \neq j_0$, et $\chi(q) = 1$ sur les autres nombres premiers. Ainsi (1) est réalisée avec $\chi(n) = -1$. Deuxième sous-cas : $p \nmid \mathrm{r}(n)$ et $p \mid \mathrm{r}(n-j_0)$. On pose alors $\chi(p) = -1$, $\chi(p_j) = (-1)^{[p\nmid\mathrm{r}(n-j)]}$ pour $0 < j \leqslant k$, $j \neq j_0$, et $\chi(q) = 1$ sur les autres nombres premiers. Ainsi (1) est réalisée avec $\chi(n) = 1$.

Remerciements. Nous remercions Christian Ballot et Gary Walsh de nous avoir suggéré l'utilisation du théorème de Siegel dans le traitement des systèmes d'équations diophantiennes. Le premier auteur remercie le laboratoire Poncelet et l'Université Indépendante de Moscou ; le second auteur remercie le LMNO et l'Université de Caen Basse-Normandie, et particulièrement Driss Essouabri, pour leur accueil et d'excellentes conditions de travail.

Références

[1] T. M. Apostol : *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, vol. 41 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[2] P. Borwein, G. Fee, R. Ferguson et A. van der Waall : Zeros of partial sums of the Riemann zeta function. *Experiment. Math.*, 16(1):21–39, 2007.

[3] H. L. Montgomery : Zeros of approximations to the zeta function. *In Studies in pure mathematics*, p. 497–506. Birkhäuser, Basel, 1983.

[4] J. H. Silverman : *The arithmetic of elliptic curves*, vol. 106 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. Corrected reprint of the 1986 original.

BALAZARD, Michel
Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206
CNRS, Université de la Méditerranée
Case 907
13288 Marseille Cedex 09
FRANCE
Adresse électronique : `balazard@iml.univ-mrs.fr`

VELÁSQUEZ CASTAÑÓN, Oswaldo
Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251
CNRS, Université Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex
FRANCE
Adresse électronique : `Oswaldo.Velasquez@math.u-bordeaux1.fr`